自然科学実験　１A弾性率

1. 目的

金属の弾性率を測定する。

1. 理論

(１)弾性率

物体に外力を加えると変形すなわち歪みが生じるが、その結果、外力に逆らって元に戻ろうとする力、応力が現れ、この性質を弾性という。応力と歪みの間の関係が1対1になっている物体を弾性体といい、応力と歪みが比例する場合、単位歪みあたりの応力を弾性率という。ここで弾性率はどのような応力と歪みを考えるかによっていくつかの弾性率が定義できるが、ここではこのうちヤング率と剛性率について考える。

長さ、断面積Ｓの長方形の物体を考える。物体の下面を固定し、上面に上向きの力Ｆを加えてδだけ伸びたとき、物体を二分するような任意の水平な断面を考えると、2つの部分はこの面を通して大きさＦの力で引き合っている。この応力を法線応力といい、大きさは単位断面積あたりの力Ｆ／Ｓで表す。歪みの大きさは伸び率δl／lで表す。このときヤング率Eは次式のように法線応力と伸び率の比で定義される。

　（１）

一方、直平行六面体の物体の下面を固定し、上面に面と平行な向きに力Ｆを加えると、力に垂直な1対の面がある角度だけ傾く。このとき生じる応力をずれの応力と呼ばれ、この大きさもＦ／Ｓで表す。歪みの大きさはこの場合である。このとき剛性率Gは、応力と変形の角度から次式のように定義される。

　（２）

(2)たわみによるヤング率の測定

厚さｄ、幅ｂの角棒を間隔ｌの2点で水平に支え,中央に下向きの力Fを加えると,棒は中央部がｈだけ下に下がるようにたわむと考えることができる。この状態の棒は断面が同じで長さが半分の棒を固い壁Wに固定し,他端に上向きの力F/2をかけた図１の状態と同じと考えることが出来る。棒の中心線より上の部分は通常の状態よりも縮んでいるので,壁を押し,反対側は伸びているので壁を引っ張る。結果棒には壁に接している面の中央を中心として,時計回り方向の偶力が働くが,これが外力のモーメント(F/2)×(l/2)と釣り合っていいる。

同様にWからｘだけ離れた点で棒を切って壁面W’に固定したと考えると,棒の長さはｌ/2‐xと短くなるので外力のモーメントは減り,それとつりあう応力も減っている。これを曲率半径で考えるなら,曲率半径は中央で最小で、外力のかかっている点では無限大となる。

そこで、曲率半径がRのとき、その部分の断面に働く力のモーメントを計算する。そこでは、図２のように中心線から厚さ方向の距離をｚであらわすと、伸び率はｚ/Rと表現できる。したがって,ヤング率Eを使うと応力はZE/Rと言えるので,断面全体に働く力のモーメントは（ｚE/R）Zを断面全体について積分して,

を得る。これから,中央からｘ離れた地点での力の釣り合いを考えると,その地点での曲率半径をRとして、

関数であるが,dy／dxがごく小さい時は近似的に

が成り立つ。ここで,前式とその前の式についてRを消去して、中心線の形を決める微分方程式

が得られる。x＝0でｙ＝０dy／dx＝0としてこの式を解くと,

となり、x＝l／2のときyがhになるので

よって

となりFとhからEが求められる。

ｚ

R

図２

x

l/2

F/2

W’

W

y

図１

(3)ねじれによる剛性率の測定

半径a、長さｌ、剛性率Gの丸棒(円柱)の上端を固定し,下端を角度θだけねじった時に生じるモーメントNを計算する。この円柱の内部に内径r,厚さdrの薄い管を考えると,ねじれのために管の母線は鉛直からψだけ傾き、ψ=rθ/lで与えられる。。したがって円管の円周に沿って加わっている力dF、端面の面積S=2πrdr、歪みψ=rθ/lの間には(２)式の関係があり、

が成り立っている。これよりdF＝(2πGθr2dr)/lとなるが、円管に働く力のモーメントdNはdFとrの積なので

となる。棒全体のモーメントはこの式をr=0からaまで積分することにより

と求められる。これを書き直すと

ここで棒の直径D=2aを使った。

３.方法

(1)ヤング率の測定

まず電子天秤で、用意されたおもり５個の重さをそれぞれ測定し、次に銅と真鍮の角棒のそれぞれの幅、厚さをノギスで５回測定した。 支持台の棒を支える２点間の距離も金尺で測定した。

支持台に載せた角棒の中心におもり受けをつるし、真ん中あたりにレーザー変位計のレーザーを当て、おもり受けにおもりを1個ずつ増やして載せていき、それぞれについてレーザー変位計の値を計測する。

(2)剛性率の測定

２枚の羽根のついた銅と真鍮の丸棒のそれぞれの直径をノギスで、長さを金尺でそれぞれ5回測定する。次に丸棒の溝のふちの距離を測定する。この丸棒を支持台の上に載せて一端を固定し、一方の羽根の部分の中心から最遠の溝におもりをヤング率の測定と同様にしてつるし、それぞれについてレーザー変位計の値を計測する。

４.結果

(１)ヤング率の実験

l=40.05cm

表１.おもりの重さ

|  |  |
| --- | --- |
| A1 | 198.674 |
| A2 | 201.405 |
| A3 | 201.498 |
| A4 | 201.227 |
| A5 | 202.138 |

表２.銅と真鍮の幅と厚さ

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 銅 | | 真鍮 | |
| 回数 | 幅b（mm） | 厚さd(mm) | 幅b（mm） | 厚さd(mm) |
| 1 | 15.04 | 3.31 | 14.973 | 2.987 |
| 2 | 15.06 | 3.01 | 14.972 | 2.979 |
| 3 | 15.04 | 3.018 | 14.972 | 2.98 |
| 4 | 15.04 | 3.01 | 14.978 | 2.975 |
| 5 | 15.035 | 3.01 | 14.971 | 2.977 |
| 平均 | 15.043 | 3.0716 | 14.9732 | 2.9796 |

表３.真鍮の変位とヤング率

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | 荷重F/N | レーザーの目盛り | 変位h(mm) | ヤング率E 　　　　　　× |
| なし | 0 | 31.203 | 0 | なし |
| A1 | 1.947 | 31.855 | 0.652 | 10.994 |
| A1+A2 | 3.920 | 32.598 | 1.395 | 10.34８ |
| A1+A2+A3 | 5.894 | 33.18 | 1.977 | 10.979 |
| A1+A2+A3+A4 | 7.866 | 33.781 | 2.578 | 11.23６ |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 9.846 | 34.471 | 3.268 | 11.095 |

真鍮のヤング率の平均は10.93×Pa、平均の実験標準偏差は0.15×Paであった。

表４.銅の変位とヤング率

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | 荷重F/N | レーザーの目盛り | 変位h(mm) | ヤング率E× |
| なし | 0 | 29.137 | 0 | なし |
| A1 | 1.947 | 29.761 | 0.624 | 12.64４ |
| A1+A2 | 3.920 | 30.396 | 1.259 | 12.619 |
| A1+A2+A3 | 5.894 | 31.068 | 1.931 | 12.372 |
| A1+A2+A3+A4 | 7.866 | 31.706 | 2.569 | 12.410 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 9.846 | 32.351 | 3.214 | 12.416 |

真鍮の剛性率の平均は12.49×Pa、平均の実験標準偏差は0.06×Paであった。

上グラフは最小自乗法より導かれる式

から傾きを求めたグラフである。

3.065674、 3.001239であった。

よって*k=*よりEについて式変形すると

となり最小自乗法によって求めたEは

11.2912.17

であった。

(2)剛性率の実験

表5．丸棒の長さｌ

|  |  |
| --- | --- |
|  | l (cm) |
| 銅 | 36.4 |
| 真鍮 | 36.3 |

表6.直径と溝のふちの距離

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 直径2a(mm) | | 溝のふちの距離(mm) | |
| 回数 | 銅 | 真鍮 | 銅 | 真鍮 |
| 1 | 4.978 | 4.985 | 37.15 | 37.5 |
| 2 | 4.975 | 4.983 | 17.3 | 37.55 |
| 3 | 4.981 | 4.995 | 37.25 | 37.5 |
| 4 | 4.989 | 4.987 | 37.1 | 37.5 |
| 5 | 4.999 | 4.982 | 37.1 | 37.3 |
| 平均 | 4.9844 | 4.9864 | 33.18 | 37.47 |

表７.中心とレーザーの距離

|  |  |
| --- | --- |
|  | 中心とレーザーの距離(mm) |
| 銅 | 31.4 |
| 真鍮 | 31 |

表８.真鍮のモーメントと剛性率

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | F(N) | レーザーの目盛(mm) | 変位(mm) | 回転角θ(rad) | モーメントN(N・mm) | 剛性率G　　　×　（Pa） |
| なし | 0 | 35.834 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A1 | 1.947 | 35.469 | 0.365 | 0.01177 | 77.79173 | 3.962 |
| A1+A2 | 3.920 | 35.023 | 0.811 | 0.02616 | 156.6528 | 3.591 |
| A1+A2+A3 | 5.894 | 34.645 | 1.189 | 0.03835 | 235.5503 | 3.683 |
| A1+A2+A3+A4 | 7.866 | 34.238 | 1.596 | 0.05148 | 314.3416 | 3.662 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 9.846 | 33.858 | 1.976 | 0.06374 | 393.4897 | 3.702 |

真鍮の剛性率の平均は3.720×Pa、平均の実験標準偏差は0.067×Paであった。

表９.銅のモーメントと剛性率

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | F(N) | レーザーの目盛(mm) | 変位(mm) | 回転角θ(rad) | モーメントN(N・mm) | 剛性率G  ×　（Pa） |
| なし | 0 | 37.474 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A1 | 1.947 | 37.201 | 0.273 | 0.00869 | 69.43893 | 4.784 |
| A1+A2 | 3.920 | 36.895 | 0.579 | 0.01844 | 139.8324 | 4.543 |
| A1+A2+A3 | 5.894 | 36.564 | 0.91 | 0.02898 | 210.2583 | 4.346 |
| A1+A2+A3+A4 | 7.866 | 36.234 | 1.24 | 0.03949 | 280.5896 | 4.256 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 9.846 | 35.938 | 1.536 | 0.04892 | 351.2392 | 4.301 |

銅の剛性率の平均は×Pa、平均の実験標準偏差は×Paであった。

上グラフは最小自乗法によって導き出される式

に各値を代入して得た。

代入して得られた値は

真鍮；k= 6140.702557

銅；k= 7207.893607

であった。

また*、*より*θ*となり上記で求めた傾きaは

*k=*

のように書け、さらに式変形すると

となりGがこれより求まる。

よって最小自乗法で求めたGは

真鍮は3.680×

銅 は4.312×

となる

５．考察

（Ⅰ）　EとGの文献値との比較

この実験で得た最小自乗法によって求めた真鍮と銅のヤング率は11.2912.17、剛性率は真鍮のはG=3.68×、銅 は4.31×だった。これは文献値を比較してみるとヤング率の方は銅が13.02%、真鍮は14.81%誤差があった。剛性率では、真鍮は1.34%、銅は10.72%の誤差があった。この誤差の要因としては

（ヤング率の実験）

１）角棒の中心におもり受けをつるしたので、レーザーを中心にあてることができなかったので角棒の変位を正確に測定できなかった。

２）角棒の表面が酸化されていたので、硬さが変わっていた。

３）おもりが静止していない状態でレーザーの目盛を読んだので、正確に測定できなかった。

（剛性率の実験）

ヤング率の実験の1）～3）に加えて、

4）回転角の値を出す時、θが非常に小さいのでという近似を用いたため誤差が生じた

5）丸棒の中心から溝のふちまでの距離測るとき目盛りが薄くなっていたので1/10mmまで正確に測れなかった

などがあげられる。

（Ⅱ）　Eの不確かさの伝播則による評価

不確かさの伝播則によりは以下のように表わされる。

*（１）*

ここでの、、は厚さ,半径,溝から淵の距離の平均標準偏差である。

ここで検定公差も考慮するとbで考えると

となる。

この式を用いると

表１０、銅と真鍮のｂ、ｄの標準偏差

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 銅 | 真鍮 |
|  | 0.004 | 0.0012 |
|  | 0.06 | 0.002 |

以上よりを求めると

表１１、銅のEと

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | 重さ（ｇ） | 変位（mm） | ヤング率E　　× | ×(Pa) |
| なし | 0 | 0 | なし | 0 |
| A1 | 198.674 | 0.624 | 12.64 | 0.8 |
| A1+A2 | 400.079 | 1.259 | 12.62 | 0.19 |
| A1+A2+A3 | 601.577 | 1.931 | 12.37 | 0.12 |
| A1+A2+A3+A4 | 802.804 | 2.569 | 12.41 | 0.15 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 1004.942 | 3.214 | 12.42 | 0.13 |

表１２、真鍮のEと

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | 重さ（ｇ） | 変位（mm） | ヤング率E 　　　　　　× | ×(Pa) |
| なし | 0 | 0 | なし | 0 |
| A1 | 198.674 | 0.652 | 10.99 | 0.11 |
| A1+A2 | 400.079 | 1.395 | 10.35 | 0.12 |
| A1+A2+A3 | 601.577 | 1.977 | 10.98 | 0.11 |
| A1+A2+A3+A4 | 802.804 | 2.578 | 11.24 | 0.11 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 1004.942 | 3.268 | 11.10 | 0.1 |

（ⅲ）Gの不確かさの伝播則による評価

Eと同様Gも

*（２）*

のように書き表わされる。ここでの、は、半径,溝から淵の距離の平均標準偏差で、ヤング率のと同じように求めることができる。

表13,銅と真鍮の半径と溝から淵の

距離の平均標準偏差

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 銅 | 真鍮 |
|  | 0.0021 | 0.0012 |
|  | 0.05 | 0.05 |

以上より、

表14,　銅のGと

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | 重さ（ｇ） | 変位（mm） | 剛性率G  ×　（Pa） | ×(Pa) |
| なし | ０ | 0 | 0 | ０ |
| A1 | 198.674 | 0.273 | 4.78 | 0.07 |
| A1+A2 | 400.079 | 0.579 | 4.54 | 0.09 |
| A1+A2+A3 | 601.577 | 0.91 | 4.35 | 0.07 |
| A1+A2+A3+A4 | 802.804 | 1.24 | 4.26 | 0.17 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 1004.942 | 1.536 | 4.30 | 0.04 |

表15,　真鍮の

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| おもり | 重さ（ｇ） | 変位（mm） | 剛性率G　　　×　（Pa） |  |
| なし | ０ | ０ | 0 | ０ |
| A1 | 198.674 | 0.365 | 3.96 | 0.07 |
| A1+A2 | 400.079 | 0.811 | 3.59 | 0.028 |
| A1+A2+A3 | 601.577 | 1.189 | 3.68 | 0.05 |
| A1+A2+A3+A4 | 802.804 | 1.596 | 3.66 | 0.04 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 1004.942 | 1.976 | 3.70 | 0.03 |

６．結論

最小自乗法によって求めたヤング率、剛性率は以下のようになった。

11.2912.17

となった。

また、ヤング率は　、剛性率はの式を使い求めた値と、そのときの不確かさは以下のようになった。

表15,ヤング率と不確かさ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 銅 | 真鍮 |
| おもり | (E± | (E± |
| なし | 0 | 0 |
| A1 | 12.64±0.8 | 10.99±0.11 |
| A1+A2 | 12.62±0.19 | 10.35±0.12 |
| A1+A2+A3 | 12.37±0.12 | 10.98±0.11 |
| A1+A2+A3+A4 | 12.41±0.15 | 11.24±0.11 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 12.42±0.13 | 11.10±0.1 |

表16,剛性率と不確かさ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 銅 | 真鍮 |
| おもり | (G± | (G± |
| なし | ０ | ０ |
| A1 | 4.78±0.07 | 3.96±0.07 |
| A1+A2 | 4.45±0.09 | 3.59±0.028 |
| A1+A2+A3 | 4.35±0.07 | 3.68±0.05 |
| A1+A2+A3+A4 | 4.26±0.17 | 3.66±0.04 |
| A1+A2+A3+A4+A5 | 4.30±0.04 | 3.70±0.03 |

7,参考文献

「理工学部1年　自然科学実験　物理学編　2009」　　　慶応義塾大学理工学部，2009